11. Βαθμίδα, Απόκλιση, Στροβιλισμός

11.1. Βαθμίδα

Έστω μια συνεχής βαθμωτή συνάρτηση $U(x,y,z)$. Αν σε ένα σημείο διατηρήσουμε σταθερά τα y και z και κινηθούμε κατά απόσταση dx στην κατεύθυνση x, η μεταβολή στο U θα είναι, σύμφωνα με τον ορισμό των μερικών παραγώγων, περίπου ίση με $\dfrac{\partial U}{\partial x}dx$. Η προσέγγιση γίνεται τόσο πιο καλή όσο μικρότερο είναι το dx. Ο συντελεστής $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο ρυθμός μεταβολής της U ανά μονάδα μετατόπισης στην κατεύθυνση x.

Αν τώρα η μετατόπιση συνεπάγεται μεταβολές στα x, y και z, δηλαδή είναι ίση με $d\vec{\mathbf{s}} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$, και αυτή έχει ως συνέπεια να μεταβληθεί η U κατά dU σε $U+dU$, τότε, για μικρή μετατόπιση, η ολική μεταβολή στο U θα είναι η *επαλληλία* των επιμέρους μεταβολών για τις ανεξάρτητες μετατοπίσεις $dx,\ dy,\ dz$. Έτσι,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \ . \tag{11.1}$$

Αυτό είναι το *ολικό διαφορικό* του U. Η dU μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της διανυσματικής μετατόπισης $d\vec{\mathbf{s}}$, αν αναγνωρίσουμε ότι το dU ισούται με το εσωτερικό γινόμενο:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\cdot(dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\cdot d\vec{\mathbf{s}} \ . \tag{11.2}$$

Ονομάζουμε το μέγεθος $\dfrac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$ *βαθμίδα* ή *κλίση* της βαθμωτής συνάρτησης U, και τη συμβολίζουμε με

$$\mathbf{grad}\,U \ . \tag{11.3}$$

Είναι η γενίκευση, σε τρεις διαστάσεις, της έννοιας της *κλίσης* ή του *ρυθμού* μεταβολής $\dfrac{df}{dx}$ μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής $f(x)$. Κατ' αναλογίαν προς τον τελεστή παραγώγισης $\dfrac{d}{dx}$ ως προς x, θα το βρούμε χρήσιμο να ορίσουμε τον αντίστοιχο τριδιάστατο τελεστή,

$$\nabla \equiv \mathbf{grad} \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \ . \tag{11.4}$$

Ο τελεστής αυτός δρα πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση που θα τοποθετηθεί στα δεξιά του, δίνοντας τη βαθμίδα της συνάρτησης: $\nabla U \equiv \mathbf{grad}\,U$. Το σύμβολο ∇ ονομάζεται *ανάδελτα*. Έτσι, το μέγεθος

$$\nabla U = \mathbf{grad}\,U = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U}{\partial z} \tag{11.5}$$

χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης U σε ένα σημείο, σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αν η μετατόπιση είναι $d\vec{\mathbf{s}} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$, η μεταβολή της U θα είναι

$$dU = \mathbf{grad}\,U \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \nabla U \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \ . \tag{11.6}$$

Δεδομένου ότι η μετατόπιση έχει μήκος $ds = |d\vec{\mathbf{s}}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, το μέγεθος

$$\frac{dU}{ds} = \mathbf{grad}\, U \cdot \frac{d\vec{\mathbf{s}}}{ds} = \nabla U \cdot \frac{d\vec{\mathbf{s}}}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{11.7}$$

εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης U σε ένα σημείο, στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{s}} \equiv \dfrac{d\vec{\mathbf{s}}}{ds}$. Έτσι,

$$\frac{dU}{ds} = \mathbf{grad}\, U \cdot \hat{\mathbf{s}} = \nabla U \cdot \hat{\mathbf{s}} \ . \tag{11.8}$$

Λόγω των ιδιοτήτων του, το μέγεθος αυτό ονομάζεται *παράγωγος κατά κατεύθυνση*. Σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα ∇U, ο ρυθμός μεταβολής του U ανά μονάδα μετατόπισης είναι

$$\left(\frac{dU}{ds}\right)_\theta = |\nabla U| \cos\theta . \tag{11.9}$$

Ο μέγιστος ρυθμός αύξησης του U παρατηρείται στην κατεύθυνση της βαθμίδας ∇U ($\theta = 0^\circ$) και είναι ίσος με $|\nabla U|$. Επίσης, για $\theta = 90^\circ$ είναι $\left(\dfrac{dU}{ds}\right)_{90^\circ} = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το διάνυσμα ∇U είναι κάθετο στις γραμμές ή επιφάνειες σταθερού U (*ισοσταθμικές* επιφάνειες - π.χ. *ισοδυναμικές* επιφάνειες αν U είναι το δυναμικό). Συνοψίζοντας:

Η βαθμίδα ∇U μιας βαθμωτής συνάρτησης U είναι ένα διάνυσμα το οποίο, σε κάθε σημείο:

1. Είναι κάθετο στις επιφάνειες σταθερού U.
2. Έχει κατεύθυνση αυτήν προς την οποίαν ο ρυθμός αύξησης του U είναι μέγιστος.
3. Έχει μέτρο που είναι ίσο με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής του U στο συγκεκριμένο σημείο.
4. Έχει προβολή σε κάποια κατεύθυνση, της οποίας το μέτρο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής του U στην κατεύθυνση αυτή.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η βαθμίδα της συνάρτησης $U(x,y,z) = 2x^2 y - yz^3$.

Από τον ορισμό $\nabla U = \mathbf{grad}\, U = \hat{\mathbf{x}}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\dfrac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\dfrac{\partial U}{\partial z}$, έχουμε

$$\nabla U = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - yz^3) + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - yz^3) + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}(2x^2y - yz^3) =$$

$$= \hat{\mathbf{x}}(4xy) + \hat{\mathbf{y}}(2x^2 - z^3) + \hat{\mathbf{z}}(-3yz^2) = 4xy\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2 - z^3)\,\hat{\mathbf{y}} - 3yz^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η βαθμίδα της συνάρτησης $f(r)$, όπου $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$.

Από τον ορισμό $\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Όμως η συνάρτηση $f(r)$ είναι συνάρτηση του r μόνο. Έτσι, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}$ κ.ο.κ.

Επίσης, επειδή $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, έχουμε $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$.

Έτσι, έχουμε: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$ και $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$.

Επομένως,

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} = f'(r)\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial r}{\partial z}\right) =$$

$$= f'(r)\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{x}{r} + \hat{\mathbf{y}}\frac{y}{r} + \hat{\mathbf{z}}\frac{z}{r}\right) = f'(r)\,\hat{\mathbf{r}}$$

Γενικά, όταν υπάρχει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή έχουμε μια συνάρτηση του r μόνο, είναι

$$\nabla f = \frac{df}{dr}\hat{\mathbf{r}} \ .$$

Για παράδειγμα, $$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ .$$

Έτσι, από το ηλεκτροστατικό δυναμικό $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$, μέσω της σχέσης $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$,

βρίσκουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ .$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή ανάδελτα μπορούμε να ορίσουμε δύο μεγέθη τα οποία είναι πολύ χρήσιμα στην ανάπτυξη της θεωρίας του διανυσματικού πεδίου: την *απόκλιση* και τον *στροβιλισμό*.

11.2. Απόκλιση

Η *απόκλιση* μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathbf{E}} = E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}}$ ορίζεται ως

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}} \equiv \operatorname{div}\vec{\mathbf{E}} \equiv \nabla\cdot(E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}}) = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}}) \qquad (11.10)$$

όπου τα εσωτερικά γινόμενα υπολογίζονται συμβολικά, διατηρώντας τη σχετική θέση των τελεστών παραγώγισης και των συνιστωσών του $\vec{\mathbf{E}}$, δηλαδή

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (11.11)$$

Να σημειωθεί ότι η απόκλιση είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

11.3. Στροβιλισμός

Ο *στροβιλισμός* μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathbf{E}} = E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}}$ ορίζεται ως

$$\nabla\times\vec{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{curl}\,\vec{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} \equiv \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}}) \qquad (11.12)$$

όπου, και πάλι, τα εξωτερικά γινόμενα υπολογίζονται συμβολικά, διατηρώντας τη σχετική θέση των τελεστών παραγώγισης και των συνιστωσών του $\vec{\mathbf{E}}$, δηλαδή

$$\nabla\times\vec{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} \qquad (11.13)$$

Να σημειωθεί ότι ο στροβιλισμός είναι ένα διανυσματικό μέγεθος.

11.4. Λαπλασιανή

Ένας άλλος χρήσιμος τελεστής είναι ο *Λαπλασιανός τελεστής*, $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv div\ grad$

Είναι:

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tag{11.14}$$

Έτσι, η ποσότητα

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{11.15}$$

ονομάζεται *Λαπλασιανή* του ψ. Είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Η Λαπλασιανή ενός διανύσματος $\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$ ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και είναι ένα διανυσματικό μέγεθος.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί η απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathbf{E}} = (2x^2 + y)\,\hat{\mathbf{x}} + z^3\,\hat{\mathbf{y}} + (x - yz)\,\hat{\mathbf{z}}$.

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} \equiv div\vec{\mathbf{E}} = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[(2x^2 + y)\,\hat{\mathbf{x}} + z^3\,\hat{\mathbf{y}} + (x - yz)\,\hat{\mathbf{z}} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(x - yz) = 4x + 0 - y = 4x - y$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός της βαθμίδας που βρέθηκε στο Παράδειγμα 1.

Στο Παράδειγμα 1 βρέθηκε ότι:

$$\nabla U = \nabla(2x^2 y - yz^3) = 4xy\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2 - z^3)\,\hat{\mathbf{y}} - 3yz^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Έτσι,

$$\nabla \times \nabla U = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4xy & 2x^2 - z^3 & -3yz^2 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \nabla U = \left(\frac{\partial(-3yz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2x^2 - z^3)}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial(4xy)}{\partial z} - \frac{\partial(-3yz^2)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial(2x^2 - z^3)}{\partial x} - \frac{\partial(4xy)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \nabla U = \big((-3z^2) - (-3z^2)\big)\hat{\mathbf{x}} + \big(0 - 0\big)\hat{\mathbf{y}} + \big((4x) - (4x)\big)\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Το αποτέλεσμα
$$\nabla \times \nabla U = \mathbf{0} \tag{11.16}$$
ισχύει γενικά για κάθε βαθμωτή συνάρτηση U, όπως μπορείτε εύκολα να αποδείξετε.

Προβλήματα

1 Δείξτε ότι: $\nabla(x^2 yz^3) = 2xyz^3\,\hat{\mathbf{x}} + x^2 z^3\,\hat{\mathbf{y}} + 3x^2 yz^2\,\hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \cdot \left(xz\,\hat{\mathbf{x}} - y^2\,\hat{\mathbf{y}} + 2x^2 y\,\hat{\mathbf{z}} \right) = z - 2y \qquad \nabla \times \left(xz\,\hat{\mathbf{x}} - y^2\,\hat{\mathbf{y}} + 2x^2 y\,\hat{\mathbf{z}} \right) = 2x^2\,\hat{\mathbf{x}} + (x - 4xy)\,\hat{\mathbf{y}}$$

2 Δείξτε ότι γενικά: $\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}$ και $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = 0$.

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998. Κεφ. 5.

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 6.

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 7.

M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Vector Analysis*. Schaum Publishing Co. 1959 κ.ε.